تابع و معادله ی درجه ۲ :

تابع درجه ۲ $\longrightarrow y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

معادله ی درجه ۲ $\longrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

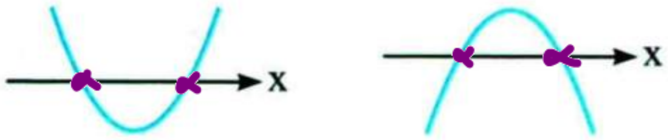
روش کلی حل معادله $\longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \longrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\downarrow$

ریشه های معادله ی درجه ۲

یا

صفرهای تابع درجه ۲ (محل های تلاقی نمودار تابع درجه ۲ با محور x ها)



$a < 0 , \Delta > 0$ $a > 0 , \Delta > 0$

معادله دو ریشه ی حقیقی متمایز دارد

$a < 0 , \Delta = 0$ $a > 0 , \Delta = 0$

معادله یک ریشه ی حقیقی مضاعف دارد

$x_{\text{مضاعف}} = \dfrac{-b}{2a}$

$a < 0 , \Delta < 0$ $a > 0 , \Delta < 0$

معادله ریشه ی حقیقی ندارد

نکته :

۱) ریشه ی هر معادله ای در آن معادله صدق می کند .

۲) اگر عبارت درجه ۲ ، دو صفر حقیقی متمایز داشته باشد ، به شکل $a(x-\alpha)(x-\beta)$ قابل بازنویسی است .

۳) اگر عبارت درجه ۲ ، یک صفر حقیقی مضاعف داشته باشد ، به شکل $a(x-\alpha)^{2}$ قابل بازنویسی است .

$ax^2+bx+c=0$

۴) اگر α و β ریشه های معادله ی درجه ۲ باشند ، داریم :

$$\boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}} \qquad \boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}} \qquad \boxed{D=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^{2}-4P}}$$

** **

۵) اگر در معادله ی درجه دوی $ax^{2}+bx+c=0$ ، a و c مختلف العلامت باشند ، معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز مختلف العلامت می باشد (بدون محاسبه ی Δ) .

۶) اگر دو معادله ی درجه دو دارای یک ریشه ی مشترک باشند ، برای پیدا کردن آن ریشه جمله ی x^{2} را بین دو معادله حذف می کنیم .

روش های سریع پیدا کردن ریشه های معادله ی درجه ۲ : (به ترتیب اولویت)

① if : $a + b + c = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} \begin{cases} 1 \\ \dfrac{c}{a} \end{cases}$ $\quad 3x^2 - 7x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} \begin{cases} 1 \\ \frac{4}{3} \end{cases}$

② if : $a + c = b \longrightarrow \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{c}{a} \end{cases}$ $\quad 2x^2 + 5x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} \begin{cases} -1 \\ -\frac{3}{2} \text{ یا } -1/5 \end{cases}$

ضریب x^2 : 1

③ حدس زدن ریشه ها به کمک S و P $\quad x^2 - 2x - 15 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} -3$ و 5

$S = 2$ ✓
$P = -15$ ✓

④ روش ac $\quad 4x^2 + 5x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} -2$ و $\frac{3}{4}$

کمکی : $1x^2 + 5x - 24 = 0$

$S = -5$
$P = -24$

-8 و 3

با ضرایب بزرگ چه کنیم ؟

*** مهم

۱۴۰۲ معادله گویا

$۱۶۰x^۲ - ۱۸x - ۹ = ۰ \longrightarrow$ ریشه ها

$\times$

$p = -\frac{۳}{۱۶}$ ✓

$\frac{۳}{۱۰}$ ✓

$(۶)^۲$

$x^۲ - ۱۸x - ۱۴۴۰ = ۰$

$\div ۶$ $\div ۳۶$

کمکی

آوش کن

$S = ۱۸$

$P = -۱۴۴۰$

$-۳۰ و ۴۸$ ← ~~۹۰ درصد~~

$x^۲ - ۳x - ۴۰ = ۰ \longrightarrow -۵ و ۸$

ضرایب کوچک

$S = ۳$

$P = -۴۰$

$\times ۶$

$-۳۰ و ۴۸$

اگر هیچ کدام از روش های سریع جواب نداد ، قطعا ریشه ها گنگ می باشند و برای پیدا کردن آن ها می رویم سراغ روش کلی :

$ax^2+bx+c=0$ زوج

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر b زوج باشد $\longrightarrow b' = \frac{b}{۲} \longrightarrow \Delta' = b'^۲ - ac \longrightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

$-۳x^۲ + ۱۸x - ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها}}$ $۳x^۲ - ۱۸x + ۱۰ = ۰$ زوج

$b' = -۹$

$\Delta' = ۸۱ - ۳۰ = ۵۱$

$$x = \frac{۹ \pm \sqrt{۵۱}}{۳} = ۳ \pm \frac{\sqrt{۵۱}}{۳}$$

اگر دو معادله ی $mx^2 + 5x - 7 = 0$ و $3mx^2 - 10x + 4 = 0$ دارای یک ریشه مشترک باشند، مقدار m کدام است ؟

۱) ۲

۲) ۲-

۳) ۱

۴) ۱-

$$3mx^2 - 10x + 4 = 0$$

$$3mx^2 + 15x - 21 = 0$$

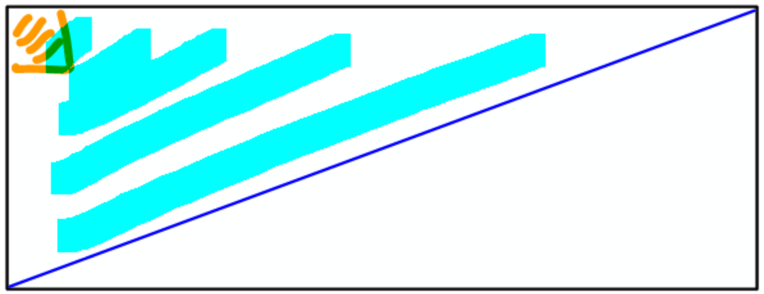
$$-25x + 25 = 0 \longrightarrow 25x = 25 \longrightarrow x = 1$$

ریشه مشترک

$$x = 1$$

$$m - 2 = 0 \longrightarrow m = 2$$

طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیش تر از ۴ برابر عرض آن است . اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد ، طول قطر آن چقدر است ؟



۱) $۶\sqrt{۲۶}$

۲) $۶\sqrt{۵۲}$

۳) $۳\sqrt{۲۶}$

۴) $۳\sqrt{۵۲}$

$۳ \times ۱ \quad ۱۵ = ۳ \times ۵$

$S = ۴a^۲ + ۳a = ۴۵$

$۴a^۲ + ۳a - ۴۵ = ۰$

$a = -\frac{۱۵}{۴}$ غ ق ق

$a = ۳$ ق ق

$۳\sqrt{۲۶}$

کمکی: $a^۲ + ۳a - ۱۸۰ = ۰$

$S = -۳$

$P = -۱۸۰$

$-۱۵ \quad ۱۲$

تست هایی که در آن ها یک معادله ی درجه ی ۲ به ما می دهند و عبارتی بر حسب ریشه های معادله مطرح کرده و مقدار عددی آن عبارت را از ما می خواهند :

روش حل : در این تست ها ابتدا **S** و **P** و درصورت نیاز **D** را به دست می آوریم و سپس با ساده سازی عبارت بر حسب آن ها مقدار عددی عبارت را محاسبه می کنیم .

چند توصیه :

۱) در صورت امکان برای ساده سازی می توان از عوامل مشترک فاکتور گرفت .

۲) در عبارت های کسری برای ساده سازی از مخرج مشترک گرفتن استفاده می کنیم .

۳) عبارت های همواره نامنفی را مساوی **A** قرار داده و طرفین را به توان می رسانیم .

۴) در عبارت های پیچیده برای ساده سازی عبارت می توان از خود معادله استفاده کرد .

سه عبارت مشهور :

$$\begin{cases} \alpha^{۲} + \beta^{۲} = (\alpha + \beta)^{۲} - ۲\alpha\beta = S^{۲} - ۲P \\ \alpha^{۳} + \beta^{۳} = (\alpha + \beta)^{۳} - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^{۳} - ۳PS \\ \left|\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}\right| = \sqrt{S \pm ۲\sqrt{P}} \end{cases}$$

نکته :

$$mA + nB = \left(\frac{m+n}{۲}\right)(A + B) + \left(\frac{m-n}{۲}\right)(A - B)$$

مهم

اگر α و β ریشه های معادله ی $2x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند ،

حاصل $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است ؟

$S = 2$

$P = \frac{1}{2}$

۱) ۱۲/۵

۲) ۲۵

۳) ۱۴/۵

۴) ۲۹

$* \quad \alpha^2 + \beta^2 = 4 - 1 = 3$

$* \quad \alpha^3 + \beta^3 = 8 - 3 = 5$

$\times$

$$\underbrace{\alpha^5 + \beta^5}_{?} + \underbrace{\alpha^2\beta^3 + \beta^2\alpha^3}_{\underbrace{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)}_{\cancel{P^2S} \to 0/5}} = 15 \Rightarrow \alpha^5 + \beta^5 = 14/5$$

اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$ باشند ،

حاصل $\dfrac{\alpha^۸ + \alpha^۴ + ۸۱}{\alpha^۴}$ کدام است ؟

۱) ۳۲۵
۲) ۳۳۴
۳) ۳۴۴ ✓
۴) ۳۵۳

$\cancel{\dfrac{A+B+C}{D}} = \dfrac{A}{D} + \dfrac{B}{D} + \dfrac{C}{D}$

$S = ۵$

$P = ۳ = \alpha\beta$

$\beta = \dfrac{۳}{\alpha}$

$\dfrac{۸۱}{\alpha^۴} = \left(\dfrac{۳}{\alpha}\right)^۴ = \beta^۴$

$\alpha^۴ + ۱ + \beta^۴ = \alpha^۴ + \beta^۴ + ۱ = ۳۴۴$

$\alpha^۴ + \beta^۴ = (\alpha^۲ + \beta^۲)^۲ - ۲(\alpha\beta)^۲ = (۱۹)^۲ - ۱۸ = ۳۴۳$

$P = \alpha\beta = \bigcirc \rightarrow \begin{cases} \alpha \\ \beta = \dfrac{\bigcirc}{\alpha} \end{cases}$

اگر α و β ریشه های معادله ی $x(x-2)=1$ باشند ،

$x^2-2x-1=0$

حاصل $\underbrace{\alpha+2\alpha^2}_{\alpha^3}+\beta^3+\cancel{\frac{\alpha^2}{2\alpha+1}}$ کدام است ؟

$\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=1$

$\begin{cases} S=2 \\ P=-1 \end{cases}$

$2x+1=x^2$

$\times x$: $2x^2+x=x^3$

1) ۱۷

2) ۱۶

3) ۱۵

4) ۱۴

$\alpha^3+\beta^3=8-\underbrace{3(-2)}_{+6}=14$

$\underbrace{\alpha^3+\beta^3}_{14}+1=15$

اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 + 4 = 6x$ بوده و $A = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ و $B = \alpha^2 - 6\beta + 4$ باشند، $\frac{B}{A}$ کدام است ؟

۱) $2\sqrt{2}$

۲) $4\sqrt{2}$

۳) $6\sqrt{2}$

۴) $8\sqrt{2}$

$x^2 - 6x + 4 = 0$ $(\alpha > \beta)$

$S = 6$, $P = 4$

$\to \alpha^2 = 6\alpha - 4$

$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$6\alpha - 4$, $= 6(\alpha - \beta) = 12\sqrt{5}$

$A = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)$

همواره مثبت

$A^2 = 10$

$\to A = \sqrt{10}$

$B = 12\sqrt{5}$

$= \frac{S^3 - 3PS}{P^2} + \frac{2}{\sqrt{P}} = \frac{144}{16} + 1 = 10$

$\alpha - \beta = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{\underbrace{36 - 16}_{4\times5 = 20}} = 2\sqrt{5}$

$\frac{B}{A} = \frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = 6\sqrt{2}$

دو تابع $f(x)=x^{۲}-۱$ و $g(x)=۲x+۱$ مفروض هستند . اگر $\frac{\alpha}{۲}$ و $\frac{\beta}{۲}$ ریشه های معادله ی $\frac{g(x-۱)}{f(-۲x+۲)}+\frac{۵}{۳}=۲$ باشند و حاصل $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ به صورت $\sqrt{\frac{a+b\sqrt{c}}{۶}}$ باشد ، مقدار $\frac{a+b}{c}$ چند است ؟

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۳}$

$\sqrt{\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۶}}$

$\frac{a+b}{c}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$

$\frac{۲x-۱}{۴x^{۲}-۸x+۳}=\frac{۱}{۳}$

$۴x^{۲}-۸x+۳=۶x-۳$

$۴x^{۲}-۱۴x+۶=۰$

$۲x^{۲}-۷x+۳=۰$

$x=\frac{۱}{۲}$ ، $x=۳$

یکی: $۱x^{۲}-۷x+۶=۰ \to ۱,۶$

$S=\frac{\alpha}{۲}+\frac{\beta}{۲}=\frac{۷}{۲} \xrightarrow{\times ۲} \alpha+\beta=۷$ Sج

$P=\frac{\alpha}{۲}\times\frac{\beta}{۲}=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۴} \alpha\beta=۶$ Pج

تست هایی که در آن ها یک رابطه بین ریشه های معادله ی درجه ۲ به ما می دهند و m (یا هر ضریب مجهول دیگری) را می خواهند :

به کمک رابطه ای که بین ریشه ها روی سوال مطرح شده است ، مقدار یا مقادیر m را به دست می آوریم .

تذکر :

اگر در حین پیدا کردن m ، ریشه ها به دست آمدند ، نیازی به چک کردن m نمی باشد

اما

اگر در حین پیدا کردن m ، ریشه ها به دست نیامدند ، باید m را چک کنیم

$$\begin{cases} \text{if } \Delta > \cdot \to \text{m ق ق} \\ \text{if } \Delta \not> \cdot \to \text{m غ ق ق} \end{cases}$$

نکته :

اگر دو ریشه قرینه ی هم باشند ← $S = \cdot$

اگر دو ریشه عکس هم باشند ← $P = ۱$

اگر دو ریشه عکس و قرینه ی هم باشند ← $P = -۱$

اگر یک ریشه k برابر ریشه ی دیگر باشد ← $\frac{b^۲}{ac} = \frac{(k+۱)^۲}{k}$

در معادله ی $2x^2 - 3x + 4m - 1 = 0$ ، اگر یکی از ریشه ها از نصف ریشه ی دیگر ۳ واحد بیش تر باشد ، m کدام است ؟

۱) -1 ✓

۲) $-1/5$

۳) -2

۴) $-2/5$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{1}{2}\alpha + 3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{3}{2}\alpha + 3 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}\alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = -1$$

$$P = \alpha \cdot \beta = -\frac{5}{\cancel{2}} = \frac{4m-1}{\cancel{2}}$$

$$4m = -4$$

$$m = -1$$

داخل ۹۳

به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله ی $mx^{۲} - (m + ۳)\,x + ۵ = ۰$ ، برابر ۶ است ؟

۱) $\frac{۹}{۵}$ و -۱

۲) ۱

۳) $-\frac{۹}{۵}$ و ۱

۴) $-\frac{۹}{۵}$

توان دو های مربعات مجذورات

$\alpha^2+\beta^2=6$

S^2-2P

$S=\frac{m+3}{m}$

$P=\frac{5}{m}$

$\left(\frac{m+3}{m}\right)^2-\frac{10}{m}=6$

$\frac{m^2+6m+9}{m^2}$

$\times m^2$

$m^2+6m+9-10m=6m^2$

$5m^2+4m-9=0$

$\begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$

$\Delta<0$

به ازای چند مقدار صحیح m ... برای

$-\frac{9}{5}$

صفر

نمی شه حذف کرد نسبه گر

$\begin{cases} \Delta>0 \\ S^2-2P=6 \end{cases}$

داخل ۱۴۰۱

$S=-6 \quad P=a$

α و β ریشه های معادله ی $x^2+6x+a=0$ هستند.

اگر $\alpha < \beta < 0$ و $3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ✓
۲) $\frac{13}{4}$
۳) $\frac{21}{5}$
۴) ۲

***

$$\boxed{\frac{5}{2}\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{S^2-2P}} + \frac{1}{2}\underbrace{(\alpha^2-\beta^2)}_{S\sqrt{S^2-4P}}$$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

غیررادیکالی — رادیکالی — از نظر اندازه

$$\frac{5}{2}(S^2-2P) = 85 \rightarrow 34$$

$$S^2-2P=34$$

$$36-2a=34$$

$$2a=2 \longrightarrow a=1$$

اگر α و β ریشه های معادله ی درجه دوم $kx^۲ - x = \frac{k}{۳}$ بوده و $۲۷(\alpha\beta^۳ + \alpha^۳\beta) + ۷ = ۰$ باشد ، مقدار $\frac{\alpha^۲}{\beta} + \frac{\beta^۲}{\alpha}$ کدام است ؟ (قدرمطلق ریشه ی مثبت بزرگ تر است.)

۱) $\frac{۱۰}{۹}$

۲) $-\frac{۱۰}{۹}$

۳) $-\frac{۸}{۹}$

۴) $\frac{۸}{۹}$

$k=۲$

$=0$

$A=\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta}=\frac{S^۳-۳PS}{P}$

$S=\frac{1}{k}=\frac{1}{۳}$

$P=-\frac{1}{۳}$

$S>0$

$۲۷\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)+۷=0$

$\underbrace{\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)}_{P(S^۲-۲P)}$

$P=-\frac{1}{۲}$

$-۹(S^۲+\frac{۲}{۲})+۷=0$

$S^۲+\frac{۶}{۹}=\frac{۷}{۹}$

$S^۲=\frac{1}{۹} \rightarrow S=\frac{1}{۳}$

$\frac{\frac{1}{۲۷}+\frac{۹}{۲۷}}{-\frac{1}{۲}}=\frac{\frac{۱۰}{۲۷}}{-\frac{1}{۲}}=-\frac{۱۰}{۹}$

تیر ۱۴۰۲

اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟ $\cancel{40\beta^2} + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$

$20\beta^2 + 20\beta^2$

$\alpha^2 - \alpha = b/a$

$S = 1 \qquad P = -(b/a) = 1/20$

$20\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{1+2(b/a)} + 20(b/a) = 17$

$20 + 60(b/a) = 17$

$60(b/a) = -3$

$b/a = -1/20$

$D = \sqrt{S^2 - 4P} = \underbrace{\sqrt{1 - 1/5}}_{4/5} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

نوشتن معادله ی درجه ی ۲ با داشتن ریشه های معادله :

ابتدا S و P معادله ی قدیم را پیدا می کنیم و سپس به کمک آن ها S و P معادله ی جدید را مشخص کرده و با قرار دادن در اسکلت زیر به معادله ی جدید می رسیم .

$$\boxed{x^{۲} - S_{\text{جدید}}x + P_{\text{جدید}} = ۰}$$

اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 + 2 = 4x$ باشند ، $\frac{\alpha^3 + \beta\alpha^2}{2}$ و $\alpha\beta^3$ ریشه های کدام معادله هستند ؟

۱) $x^2 - 24x + 4 = 0$

۲) $x^2 - 24x + 16 = 0$

۳) $x^2 - 48x + 2 = 0$

۴) $x^2 - 48x + 8 = 0$

$x^2 - 4x + 2 = 0$

$S_{ق} = 4$

$P_{ق} = 2$

$$\begin{cases} S_{ج} = 2\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{S_{ق}^2 - 2P_{ق}} = 24 \\ P_{ج} = 4\underbrace{(\alpha\beta)^2}_{P_{ق}^2} = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\beta^3 = (\alpha\beta)\beta^2 = P_{ق}\beta^2 = 2\beta^2 = \beta_{ج} \\ \frac{\alpha^3+\beta\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)}{2} = \frac{S_{ق}}{2}\alpha^2 = 2\alpha^2 = \alpha_{ج} \end{cases}$$

$x^2 - 24x + 16$

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه های معادله ی $x = x^2 - 4$ باشند و $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$ ریشه های معادله ی $4x^2 + mx + n = 0$ باشند ، مقدار $m - n$ کدام است ؟

$-51 + 221 = 170$

$m = -51$, $n = -221$

۱) ۲۴۸
۲) ۱۴۶
۳) ۲۷۲
۴) ۱۷۰ ✓

$x^2 - x - 4 = 0$

$S = 1$

$P = -4$

$$S_j = \underbrace{x_1^3 + x_2^3}_{S^3 - 3PS = 13} + \underbrace{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}_{S/P = -\frac{1}{4}} = 13 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

$$P_j = \underbrace{(x_1x_2)^3}_{P^3 = -64} + \underbrace{\frac{1}{x_1x_2}}_{1/P = -\frac{1}{4}} + \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{S^2 - 2P = 9} = \cancel{-55} - \frac{1}{4} = -\frac{221}{4}$$

$-220/4$

معادله ی جدید: $x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0$

$\times 4$: $4x^2 - 51x - 221 = 0$

برای دو عدد نامساوی α و β ، اگر رابطه $\alpha^{۲} = ۳\alpha - ۱$ و $\beta^{۲} = ۳\beta - ۱$ برقرار باشد ، معادله ی درجه دومی که ریشه های آن $\left\{ \sqrt{۲\beta^{۲}(۶\alpha - ۲)} \right.$ و $\left. \alpha^{۳} + \frac{۱}{\alpha^{۳}} \right\}$ باشند ، کدام است ؟

$P = \alpha\beta = 1 \rightarrow \beta = 1/\alpha$

۱) $x^{۲} - ۱۲x + ۲۰ = ۰$

۲) $x^{۲} + ۱۲x - ۲۰ = ۰$

۳) $x^{۲} - ۲۰x + ۳۶ = ۰$

۴) $x^{۲} + ۲۰x + ۳۶ = ۰$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$S = 3$

$P = 1 > 0$

$3x - 1 = x^2 \xrightarrow{\times 2} 6x - 2 = 2x^2$

$\underbrace{\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}}_{\alpha^3 + \beta^3}$ و $\underbrace{\sqrt{2\beta^2(\underbrace{6\alpha - 2}_{2\alpha^2})}}_{2|\alpha\beta|}$

S ج $= \alpha^3 + \beta^3 + 2|\alpha\beta| = \frac{S^3 - 3PS + 2P}{} = 27 - 9 + 2 = 20$ (۲۰)

S ج: ۱۲ ، -۱۲ ، ۲۰ ، -۲۰

P ج

قلق تستی (برای حالات خاص و البته مشهور) :

اگر معادله ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ را داشته باشیم ، داریم :

معادله ای که ریشه های آن قرینه ی ریشه های معادله ی فوق می باشد :

$$\boxed{ax^{۲}-bx+c=۰}$$

معادله ای که ریشه های آن معکوس ریشه های معادله ی فوق می باشد :

$$\boxed{cx^{۲}+bx+a=۰}$$

معادله ای که ریشه های آن k برابر ریشه های معادله ی فوق می باشد :

$$\boxed{ax^{۲}+kbx+k^{۲}c=۰}$$

معادله ای که ریشه های آن k واحد بیش تر (کم تر) از ریشه های معادله ی فوق می باشد :

$$\boxed{a(x\mp k)^{۲}+b(x\mp k)+c=۰}$$

اگر ریشه های معادله ی $x^2 - 3x - 1 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha - 1} \text{ و } \frac{1}{\beta - 1}\right\}$ بوده و معادله ای که ریشه هایش به صورت $\{-2\alpha - 4 \text{ و } -2\beta - 4\}$ است ، به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ باشد ، $\frac{a+b}{c}$ کدام است ؟

$-1 \quad -6 \quad 4$

۱) $\frac{5}{4}$

۲) $-\frac{5}{4}$

۳) $-\frac{7}{4}$

۴) $\frac{7}{4}$

قدیم

$\frac{1}{x-1}$

جدید

$-2x-4$

$-2(x+2)$

به ترتیب

۱) عکس

۲) پیش تر واحد

۳) دو برابر

۴) قرینه

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$-x^2 - 3x + 1 = 0$

$-x^2 + 3x + 1 = 0$

$\times 2 \quad \times 4$

$-x^2 + 6x + 4 = 0$

$-x^2 - 6x + 4 = 0$

$\frac{-7}{4}$

اگر α و β ریشه های معادله ی $(۳x+۲)^۲ - x = ۳$ باشند ، ریشه های کدام یک از معادله های زیر $\underbrace{(۳\alpha+۲)^۲}_{\alpha+۳}$ و $\underbrace{(۳\beta+۲)^۲}_{\beta+۳}$ است ؟

۱) $۹x^۲ - ۴۳x + ۴۸ = ۰$

۲) $۹x^۲ - ۴۸x + ۴۳ = ۰$

۳) $۹x^۲ - ۴۳x + ۴۹ = ۰$

۴) $۹x^۲ - ۴۹x + ۴۳ = ۰$

$(۳x+۲)^۲ = x+۳$

$۹x^۲+۱۲x+۴-x-۳=۰$

$۹x^۲+۱۱x+۱=۰$ α و β

$x \to x-۳$

$۹\underbrace{(x-۳)^۲}_{x^۲-۶x+۹}+\underbrace{۱۱(x-۳)}_{۱۱x-۳۳}+۱=۰ \longrightarrow ۹x^۲-۴۳x+۴۹=۰$

$\underbrace{۹(x^۲-۶x+۹)}_{۹x^۲-۵۴x+۸۱}$

اگر مجموعه جواب معادله ی $x^2 - x - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha + 1 \text{ و } \beta + 1\}$ باشد ، مجموعه جواب کدام معادله به صورت $\{\alpha^2 + \beta^2 \text{ و } \alpha^2\beta^2\}$ است ؟

۱) $x^2 + 5x + 6 = 0$ — -5

۲) $x^2 - 5x + 4 = 0$ — 5

۳) $x^2 - 4x + 3 = 0$ — 4

۴) $x^2 + 4x + 3 = 0$ — -4

جمع

$\alpha+1$ و $\beta+1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x + 1$

α و β

x

یک واحد کمتر

$S = -1$

$P = -1$

$x^2 + x - 1 = 0$

$S_{ج} = \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta)^2 = S^2 - 2P + P^2 = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$

اگر ریشه های معادله ی $4x^2 - 12x + m = 0$ از k برابر مکعب ریشه های معادله ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ ، ۲ واحد کمتر باشد ، m کدام است ؟

۱) ۷

۲) ۸

۳) -41

۴) -39

معادله ی قدیم : $x^2-2x-1=0 \quad \alpha , \beta$

$S=2$

$P=-1$

$S_{ج}=\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS = 8+6=14$

$P_{ج}=(\alpha\beta)^3=P^3=-1$

$x^2-14x-1=0$

$k \qquad k^2$

$x^2-14kx-k^2=0$

$x^2+(\underbrace{4-14k}_{-3})x+\underbrace{4-28k-k^2}=0$

$-10+\cancel{14}-\cancel{14}-1/4=-41/4$

توان سوم

$\div 4$

$x^2-3x+m/4=0$

$x \longrightarrow kx^3-2$

قدیم

جدید

$4-14k=-3$

$14k=7$

$k=1/2$

$m/\cancel{4}=-41/\cancel{4}$

$m=-41$

۱) مکعب

۲) k برابر

۳) ۲ واحد کمتر

α^3 , β^3

تیر ۱۴۰۲

جدید

قدیم

$\left[\frac{-6}{4}\right] = -2$

ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟

$x - \frac{1}{2}$

$2a\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + a\left(x - \frac{1}{2}\right) - 6 = 0$

$\underbrace{2ax^2}_{2x^2} - ax \underbrace{- 6}_{b} = 0$

$a = 1$

$b = -6$

۱) -4

۲) -3

۳) -2

۴) -1

روش حل سریع نامعادلات درجه ۲ :

$2x^2 - x - 15 = 0$

$x = -2/5$

$x = 3$

مثلاً :

$x^2 - x - 30 = 0$

$S = 1$

$P = -30$

-۵ و ۶

(درجه ۱)(درجه ۱)

$ax^2 + bx + c \quad \begin{matrix} > \\ < \\ \geq \\ \leq \end{matrix} \quad 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها : } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \text{بین دو ریشه} \rightarrow \text{جذب} \\ \text{خارج دو ریشه} \rightarrow \text{دفع} \end{cases}$

علامت عبارت درجه ۲ = علامت ضریب x^2

توجه :

اگر مساوی داشته باشیم خود ریشه ها جواب هستند

و

اگر مساوی نداشته باشیم خود ریشه ها جواب نیستند

مثال :

$2x^2 - x - 15 \leq 0 \xrightarrow{\text{مجموعه جواب}} x \in [-2/5, 3]$

$-2/5$

3

ناهمنام

$+$

$-$

بحث روی علامت ریشه های معادله ی درجه ۲ (صفرهای تابع درجه ۲) :

معادله ی درجه ۲ :

دارای دو ریشه ی حقیقی مثبت است $\longleftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{array}\right.$

دارای دو ریشه ی حقیقی منفی است $\longleftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{array}\right.$

دارای دو ریشه ی حقیقی مختلف العلامت است :

الف) در مورد مقایسه ی اندازه یا بزرگی ریشه ها صحبت نشده است $\left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{array}\right.$ $\longrightarrow$ a و c مختلف العلامت

ب) در مورد مقایسه ی اندازه یا بزرگی ریشه ها صحبت شده است $\left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{array}\right.$ $\longrightarrow$ a و c مختلف العلامت

اندازه ی ریشه ی مثبت بزرگ تر $S > 0$

اندازه ی ریشه ی منفی بزرگ تر $S < 0$

به ازای کدام مقادیر a ، تابع درجه دوم $x^۲ - ۲(a-۲)x + ۱۴ - a$ محور x ها را در دو نقطه با طول های مثبت قطع می کند ؟

۱) $-۲ < a < ۲$

۲) $۲ < a < ۵$

۳) $۲ < a < ۱۴$

۴) $۵ < a < ۱۴$

معادله ۲ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت دارد

$$\Delta > 0 \longrightarrow \cancel{4}(a-2)^2 - \cancel{4}(14-a) > 0$$

$$a^2 - 4a + 4$$

$$a^2 - 3a - 10 > 0$$

$S = 3$

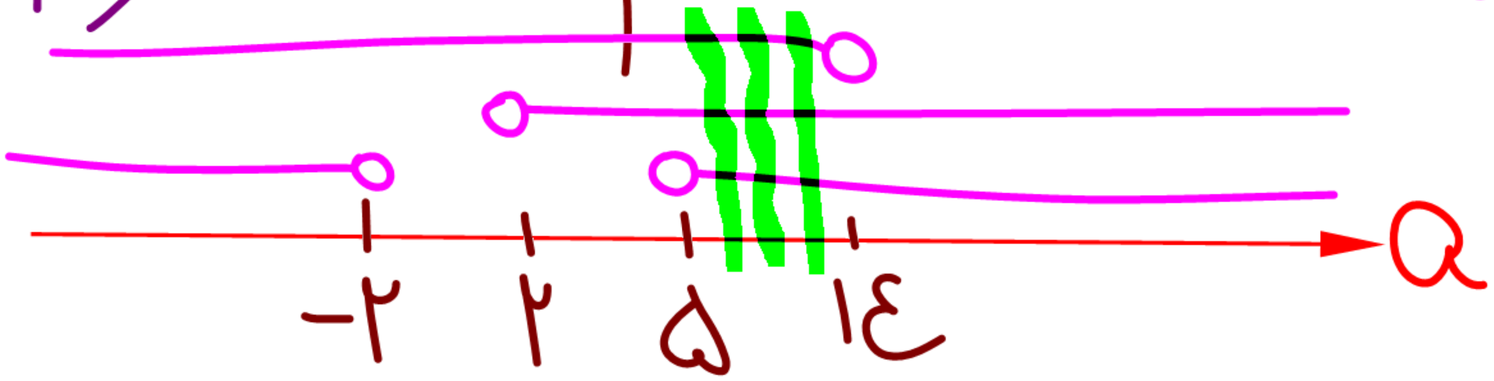
$P = -10$

-2 و 5

$a < -2$ و $a > 5$

$$S > 0 \longrightarrow \frac{2(a-2)}{1} > 0 \longrightarrow a > 2$$

$$P > 0 \longrightarrow \frac{14-a}{1} > 0 \longrightarrow a < 14$$



$5 < a < 14$

۶و۷و۸و۹و۱۰و۱۱و۱۲و۱۳

پرسش: به ازای چند مقدار طبیعی a ...

۸

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی $x^2 - \underbrace{(m+5)}_{b}x + \underbrace{2m-3}_{c} = 0$ و $x_2 < |x_1| < x_1$ باشد ، آن گاه m چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد ؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

مثبت منفی

۱و۰و۱-و۲-و۳-و۴-

توجه: $u<|u| \Rightarrow u<0$

ترجمه: x_1 و x_2 مختلف العلامت هستند

معادله ۲ ریشه ی حقیقی مختلف العلامت دارد.

c و a مختلف العلامت هستند $\longrightarrow 2m-3<0 \longrightarrow 2m<3 \longrightarrow m<\frac{3}{2}$

$S>0 \longrightarrow m+5>0 \longrightarrow m>-5$

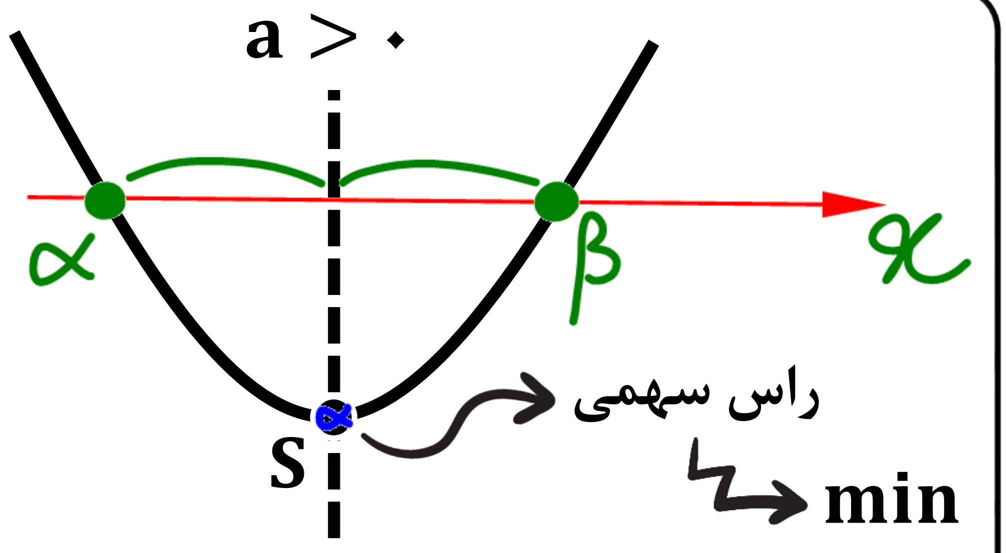
$-5<m<1/5$

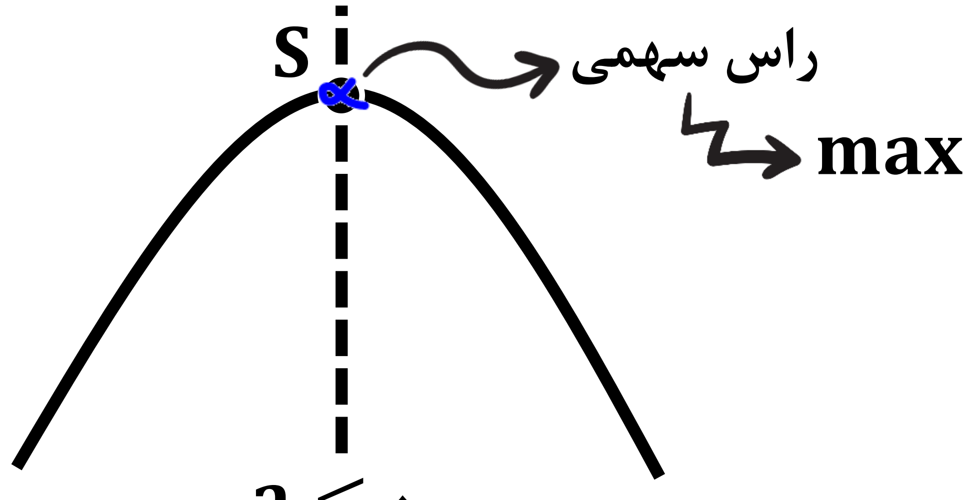
سهمی همیشه متقارن است.

$S=\alpha+\beta=2x_S$ $x_S=\frac{\alpha+\beta}{2}$ α و x_S و β

سهمی :

نمودار تابع درجه ۲ $(y = ax^2 + bx + c)$ به صورت سهمی است .





مختصات راس سهمی $\left(\frac{-b}{2a} \text{ و } y\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

معادله ی محور تقارن سهمی $x = x_S = \frac{-b}{2a}$

توجه : ۲ مجموع ریشه های معادله ی درجه $S = 2x_S$

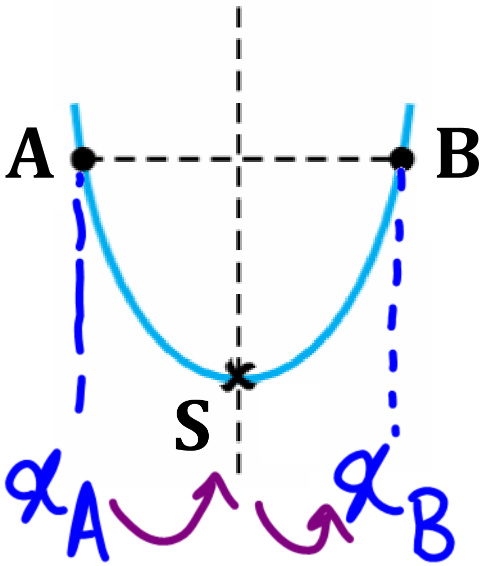
تذکر :

با استفاده از راس سهمی ، می توان بیش ترین و کم ترین مقدار تابع درجه ی دوم را در مسائل مختلف پیدا کرد

نکته :

$x_A \to x_S \to x_B$

اگر دو نقطه ی $A(x_A, y)$ و $B(x_B, y)$ (دو نقطه با عرض یکسان) روی یک سهمی باشند ، داریم :



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

$$x_A + x_B = ۲x_S$$

حالت خاص مشهور :

اگر α و β صفرهای تابع درجه ۲ (محل های تلاقی سهمی با محور طول ها) باشند ، داریم :

$(\alpha, 0)$

$(\beta, 0)$

$$x_S = \frac{\alpha + \beta}{۲}$$

توجه :

اگر دو جفت نقطه ی هم عرض داشته باشیم ، مجموع طول های جفت اول با مجموع طول های جفت دوم برابر است .

بررسی ضرایب تابع درجه ۲ :

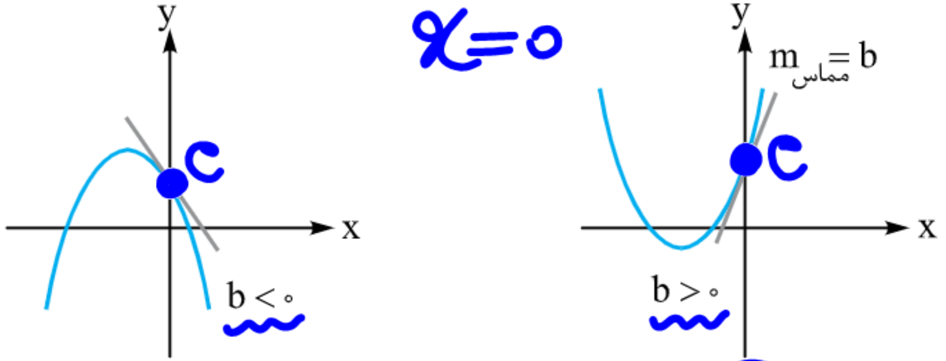
در تابع درجه دوم $(f(x) = ax^{2} + bx + c)$ داریم :

۱) علامت a جهت گودی سهمی را نشان می دهد

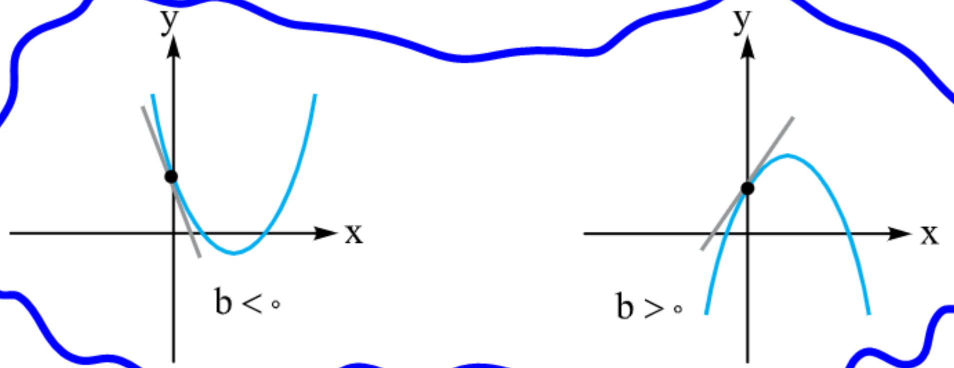
تقعر

۲) علامت b شیب خط مماس بر سهمی در نقطه ی عرض از مبداء را نشان می دهد

$x=0$



عین بالایی ها



۳) c عرض از مبداء سهمی است

تکنیک قوی برای پیدا کردن بیش ترین و کم ترین مقدار تابع درجه ی دوم :

$$y = ax^{۲} + \cancel{bx} + c \quad -$$

$$x_S = \frac{-b}{۲a}$$

$$y_S = c - a x_S^{۲}$$

مثال :

$$y = -۳x^{۲} + \cancel{۴x} - ۱ \longrightarrow y_S = \frac{۱}{۳}$$

$$x_S = \frac{+۴}{+۶} = \frac{۲}{۳}$$

دی ۱۴۰۱

محور تقارن سهمی های $y = x^{۲} + ax - ۲$ و $y = -x^{۲} - ۲x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه بـا عـرض یکسان روی دو سهمی خط $y = ۱$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟

۸

۱) ۸
۲) ۴
۳) -۴
۴) -۸

$x_s = \frac{-b}{۲a}$

$\frac{-a}{۲} = \frac{۲}{-۲} \rightarrow a = ۲$

$x^۲ + ax - ۳ = 0$

$x^۲ + ۲x + ۱ - b = 0$

$\rightarrow ۱ - b = -۳$

$b = ۴$

داخل ۱۴۰۱

$m>0$ ✓

y_s

کمترین مقدار تابع $y = mx^۲ - ۱۲x + ۵m - ۱$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی کدام است؟

۱) $x = ۲$

۲) $x = ۲/۵$

۳) $x = ۳$

۴) $x = ۳/۵$

$x = x_s = \frac{۱۲}{۲m} = \frac{۶}{m} > 0$

$\frac{۶}{۳} = ۲$

$y_s = ۵m - ۱ - \frac{۳۶}{m} = ۲$

$m\left(\frac{۳۶}{m^۲}\right) = \frac{۳۶}{m}$

$\times m$

$۵m^۲ - ۳m - ۳۶ = 0$

$m = -\frac{۱۲}{۵}$ غق

$m = ۳$ ق

یعنی: $m^۲ - ۳m - ۱۸۰ = 0$

$S = ۳$

$P = -۱۸۰$

-۱۲ و ۱۵

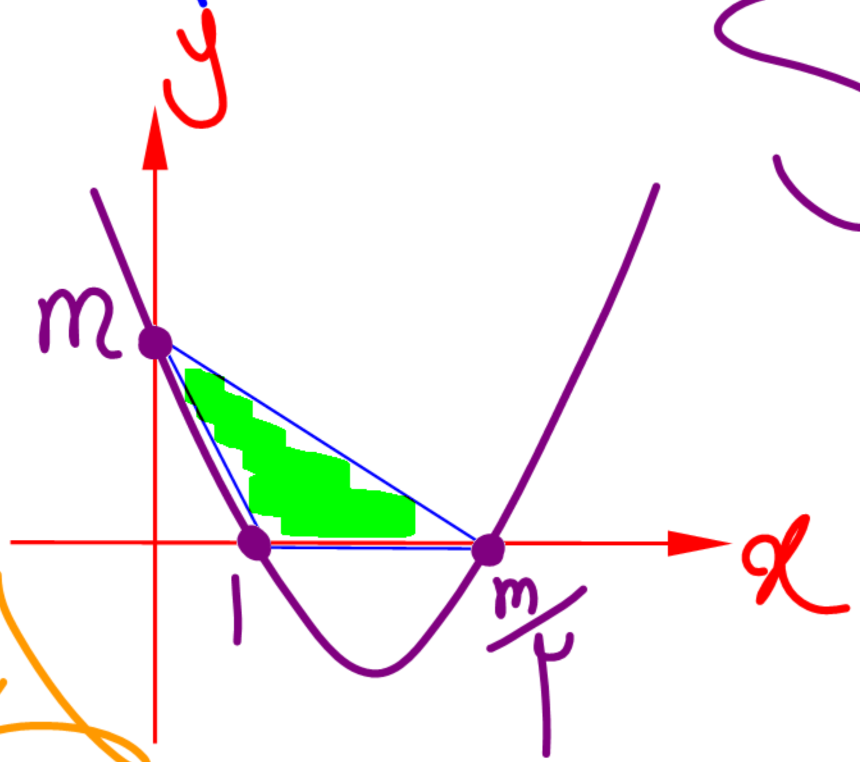
تیر ۱۴۰۲

مجموع ضرایب $= 2 + m - m - 2 = 0 \Leftarrow$ ریشه‌ها 1 و $\frac{m}{2}$

$a \neq 0$

صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟

$x_S = \frac{m}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ جواب ، $\frac{3}{2}$



$S = \frac{3}{4}$

$$S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{m}{2} - 1\right) \times m = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}m^2 - m$$

$$\frac{1}{2}m^2 - m - \frac{3}{2} = 0 \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $-\frac{3}{4}$

۴) $-\frac{1}{2}$ ✓

روش های نوشتن معادله ی سهمی :

۱) اگر مختصات سه نقطه از سهمی را داشته باشیم :

با تشکیل دستگاه سه معادله – سه مجهولی و حل آن سه ضریب a , b , c را مشخص کرده و به معادله ی سهمی $(y = ax^2 + bx + c)$ می رسیم .

حل عادی

قلق قدرتمند :

اگر دو نقطه از سه نقطه دارای ویژگی یکسان باشند ، داریم :

(x_1 , y_1)

$f(x)$

(x_2 , y_2)

$f(x)$

(x_3 , y_3)

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) + f(x)$$

یک چند جمله ای حداکثر درجه ۲

به کمک مختصات نقطه ی آزاد به دست می آید

اگر نتوانستیم ویژگی مشترک پیدا کنیم ، چه کنیم ؟

در چنین شرایطی ، ویژگی مشترک همان معادله ی خطی است که از دو نقطه می گذرد .

روش های نوشتن معادله ی سهمی :

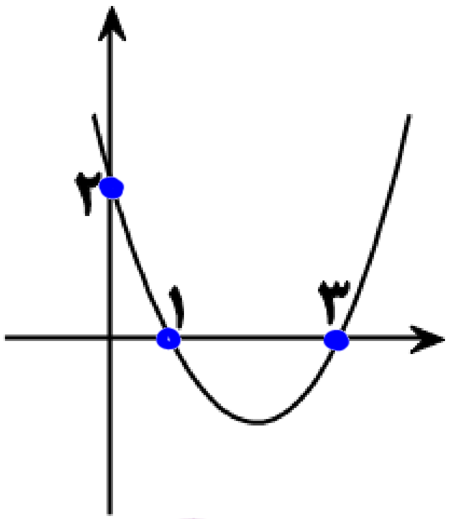
۲) اگر مختصات راس سهمی را داشته باشیم :

$$y = a(x - x_S)^{۲} + y_S$$

به کمک مختصات یک نقطه غیر از راس سهمی به دست می آید

مثال :

معادله ی سهمی های زیر را بنویسید .



$(1,0)$

$(3,0)$

$(0,2)$

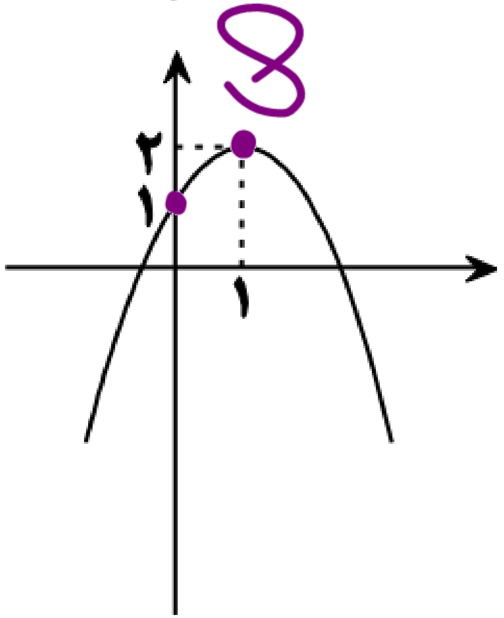
$f(x)=0$

$y=a(x-1)(x-3)$

$a = \frac{2}{3}$

$(x-1)(x-3) = x^2-4x+3$

$= \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$



$S(1,2)$

$(0,1)$

$y=a(x-1)^2+2$

$a=-1$

$(x-1)^2 = x^2-2x+1$

$= -x^2+2x+1$

$f(x)$ سهمی گذرنده از نقطه های (۴ و ۲) ، (۱ و ۱-) و (۱۴- و ۴) می باشد .

مکعب ریشه ی بزرگ تر معادله ی $-۲f(x) = ۲x - ۱۵$ از مربع ریشه ی کوچک تر آن چقدر بزرگ تر است ؟

۱) $\frac{۲۷}{۸}$

۲) $\frac{۲۷}{۴}$

۳) $\frac{۲۵}{۸}$

۴) $\frac{۲۵}{۴}$

توان سوم

توان دوم

(۴ و ۲)

(۱ و ۱-)

(۴ و ۱۴-)

$f(x) = x^2$

$f(x) = x + 2$

$f(x) = a(x-2)(x+1) + x^2$

$\underbrace{(x-2)(x+1)}_{x^2-x-2}$

$a = -3$

$f(x) = -2x^2 + 3x + 6$

معادله :

$4x^2 - 6x - 12 = 2x - 15$

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}$

کمک : $x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow$ ۲ و ۶

$S = 8 \quad P = 12$

جواب : $\frac{27}{8} - \frac{2}{8} = \frac{25}{8}$

تیر خارج ۱۴۰۲

$x_s = -2 \qquad y_s = -\frac{1}{2}$

نقاط $(1,\beta)$ و $(-5,\beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{1}{2}$ است. اگر سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{3}{2}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲−

۴) ۱−

$f(x) = y = a(x+2)^2 - \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

$(0, \frac{3}{2})$ در سهمی

$\beta = f(1) = 4$

تیر ۱۴۰۲

$S=\alpha+\beta=2x_S=-2$ $\quad x_S=-1$ $\quad y_S=1$

نقاط $A(3,y)$ و $B(-5,y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2+\beta^2=5$ باشد، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{1}{3}$

۲) $-\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{2}{3}$

عرض از مبدأ $=P=y(0)=\frac{1}{3}$

صفرهای تابع

$S^2-2P=5$

$4-2P=5$

$2P=-1 \rightarrow P=-\frac{1}{2}$

$P=\frac{a+1}{a}$

$1+\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{a}=-\frac{3}{2}$

$a=-\frac{2}{3}$

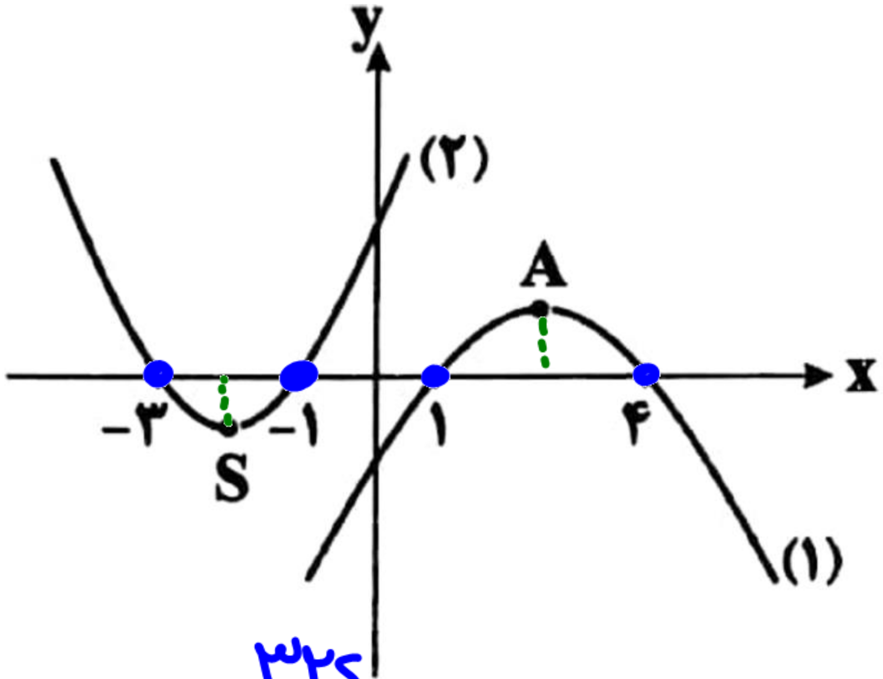
$y=a(x+1)^2+1$

x^2+2x+1

$=ax^2+2ax+a+1$

$-\frac{2}{3}$

نمودار دو سهمی $y_1 = -x^2 + mx + n$ و $y_2 = x^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر است .
فاصله ی راس های آن ها چقدر است ؟



$y_1 = -(x-1)(x-4)$

$y_2 = (x+3)(x+1)$

$+\frac{3}{2} \times +\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

$1 \times -1 = -1$

$S_1\left(\frac{5}{2} , \frac{9}{4}\right)$

$S_2(-2 , -1)$

$|\Delta x| = \frac{9}{2} = \frac{18}{4}$

$|\Delta y| = \frac{13}{4}$

$\frac{1}{4} \times 18$ → ۳۲۴

$\frac{1}{4} \times 13$ → ۱۶۹

$\rightarrow \frac{1}{4}\sqrt{493}$

۱) $\frac{1}{4}\sqrt{493}$

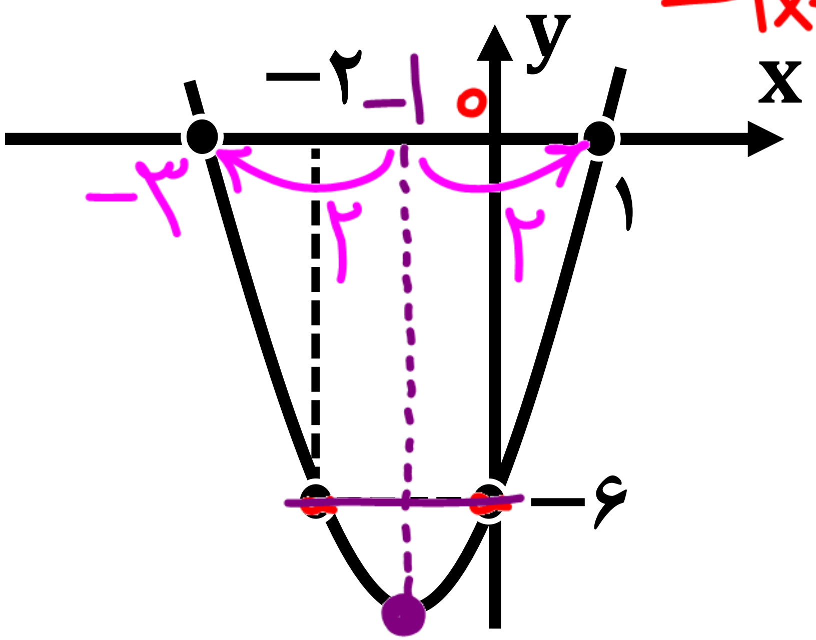
۲) $\frac{1}{2}\sqrt{493}$

۳) $\frac{1}{4}\sqrt{439}$

۴) $\frac{1}{2}\sqrt{439}$

اگر نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر باشد ، $(a-b)c$ چند است ؟

$-2 \times -6 = 12$



$(-3, 0)$
$(1, 0)$ $\} f(x) = 0$
$(0, -6)$

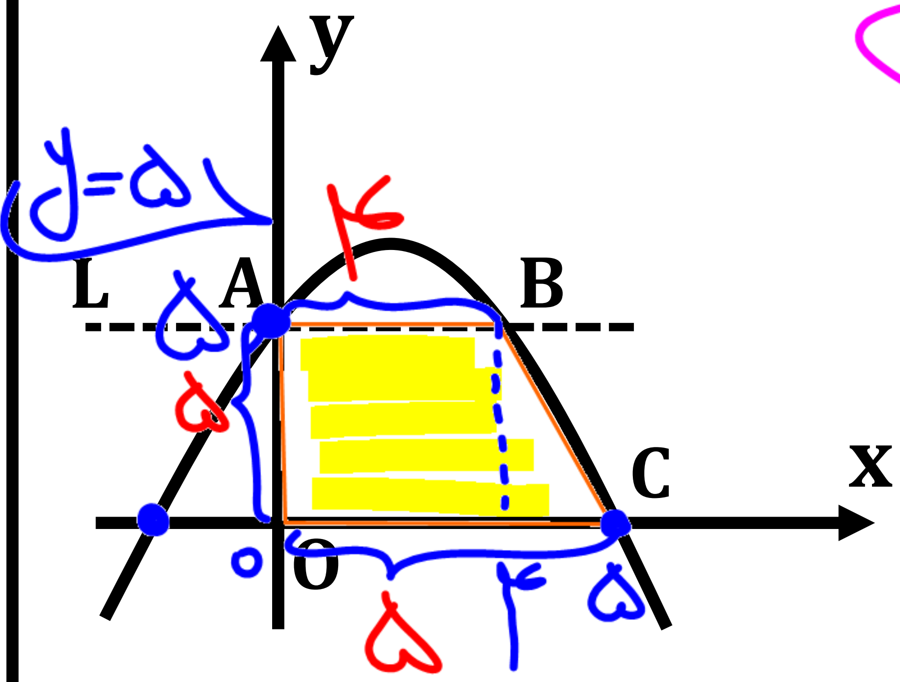
$y = 2(x+3)(x-1)$

$\underbrace{(x+3)(x-1)}_{x^2+2x-3}$

$\overset{a}{2x^2} + \overset{b}{4x} - \overset{c}{6}$

۱) ۱۲ ✓
۲) ۸
۳) −۱۲
۴) −۸

شکل زیر مربوط به تابع $y = -x^۲ + ۴x + ۵$ است . مساحت ذورنقه ی ABCO چقدر است ؟ (خط L موازی محور xهاست.)



۱) ۲۱/۵
۲) ۲۴/۵
۳) ۲۳/۵
۴) ۲۲/۵

$$S = \frac{(\text{قاعده کوچک} + \text{قاعده بزرگ}) \times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵$$

$$-x^۲ + ۴x + ۵ = 0$$

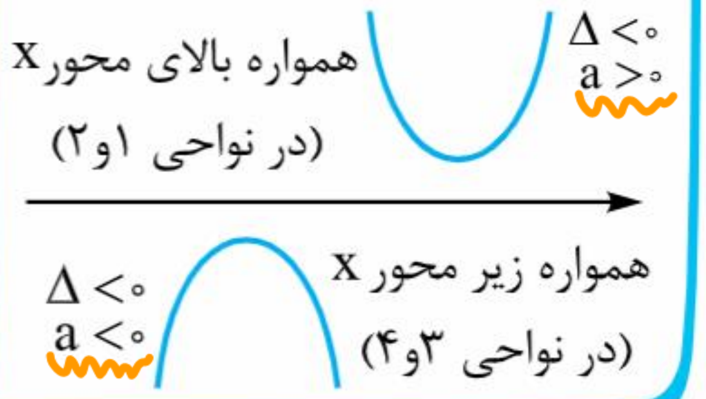
-۱ و ۵

$$-x^۲ + ۴x + \cancel{۵} = \cancel{۵}\ 0$$

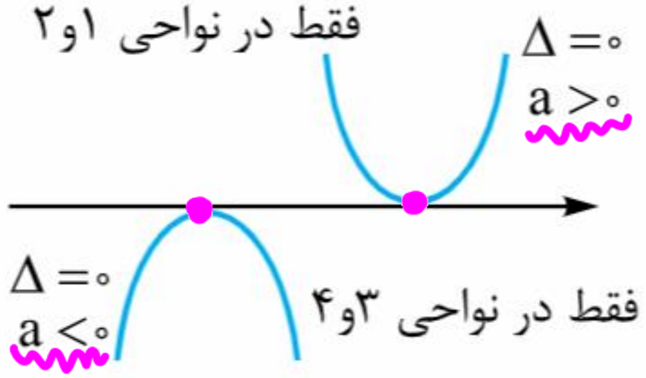
$$x(-x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = ۴ \end{cases}$$

بررسی نحوه ی قرارگیری سهمی در صفحه ی مختصات :
(گذشتن یا نگذشتن سهمی از نواحی مختلف)

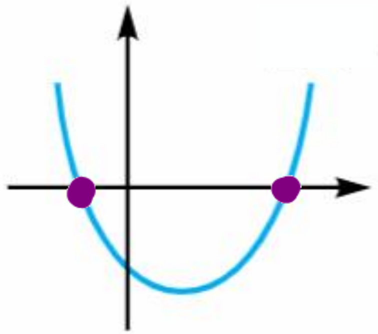
الف اگر $\Delta < 0$ باشد، سهمی فقط در ۲ ناحیه است.



ب اگر $\Delta = 0$ ، سهمی بر محور x مماس است و فقط از ۲ ناحیه رد می‌شود.



پ اگر $\Delta > 0$ باشد، در حـــالـت $P < 0$، سهمی حتماً از ۴ ناحیه می‌گذرد و محور x را در دو نقطهٔ چپ وراست مبدأ قطع می‌کند.



ت اگر $\Delta > 0$ و $P \geq 0$ باشد، سهمی فقط از ۳ ناحیه می‌گذرد. باید به علامت a و علامت ریشه‌ها دقت کرد.

به ازای $m \in (a \text{ و } b)$ ، سهمی به معادله ی $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x ها است . $2a + 3b$ چند است ؟

۱) ۱۴
۲) ۱۶
۳) ۱۹
۴) ۲۱

a زوج b c

$b' = \frac{b}{2} = m - 3$

$\Delta' < 0 \rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m = m^2 - 7m + 10 < 0$

$S = 7$ ✓ $P = 10$ ✓

ریشه‌ها ۲ و ۵

$m \in (2 , 5)$

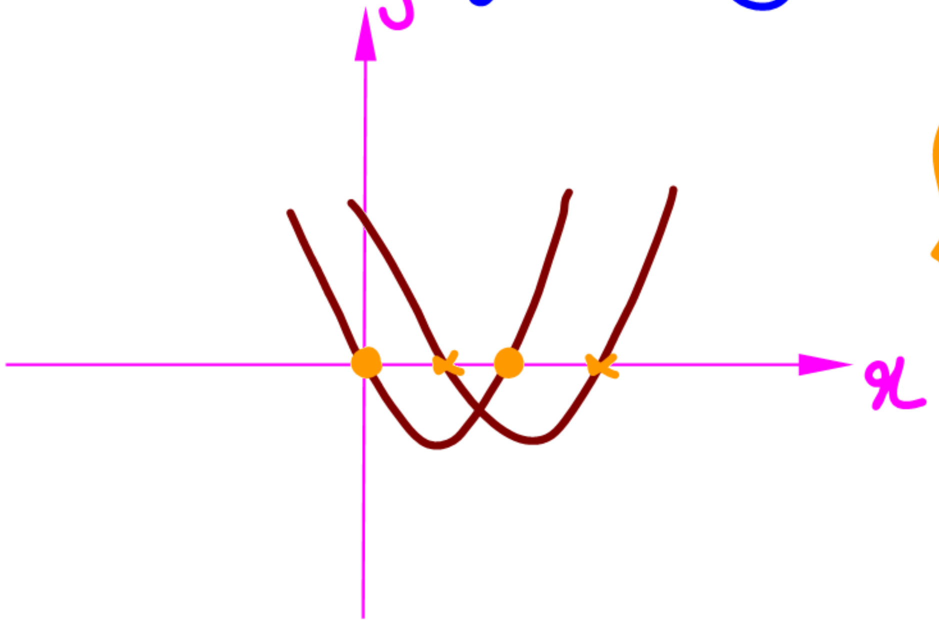
$a < 0 \rightarrow 1 - m < 0 \rightarrow m > 1$

$m \in (2 , 5)$

اشتراک

$2a + 3b = 4 + 15 = 19$

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی تابع درجه دوم $y = \underbrace{m}_{a}x^2 \underbrace{-m}_{b}x + \underbrace{2m-1}_{c}$ فقط از ناحیه ی سوم صفحه ی مختصات **نمی گذرد** ؟



$$m^2 - \underbrace{4(2m^2 - m)}_{-8m^2+4m}$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow -7m^2+4m>0 & m\in(0, \tfrac{4}{7}) \quad (1)\; 0<m<\tfrac{4}{7} \\ a>0 \Rightarrow m>0 \quad (2) \\ S>0 \Rightarrow 1>0 \checkmark \\ P \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2m-1}{m} \geq 0 & m \geq \tfrac{1}{2} \quad (3) \end{cases}$$

m : مثبت

$$1 \cap 2 \cap 3 \rightarrow \tfrac{1}{2} \leq m < \tfrac{4}{7} \qquad m\in[\tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{7})$$

۱) $(\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$

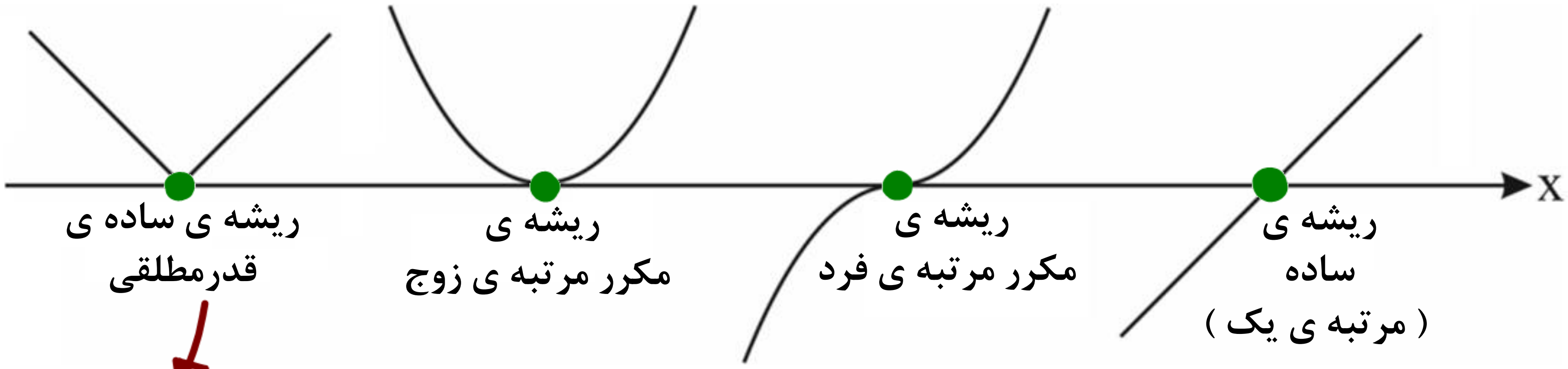
۲) $[\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$ ✓

۳) $[\frac{1}{2}, +\infty)$

۴) $(0, \frac{1}{2}]$

تعیین علامت و نامعادله :

انواع ریشه ها :



ریشه ی ساده ی داخل قدرمطلق در کل مثل ریشه ی مکرر مرتبه زوج عمل می کند

با توجه به شکل بالا :

در ریشه های ساده و مکرر مرتبه فرد علامت عوض می شود

و

در ریشه های مکرر مرتبه زوج علامت عوض نمی شود .

روش های تعیین علامت :

روش اول : روش کلاسیک یا تشریحی (پیرمون می کنه پس باهاش کاری نداریم)

روش دوم : روش تکنیکال فوق سریع

مرحله ی ۱ : ریشه های عبارت را پیدا می کنیم .

توجه : اگر عبارت کسری بود هم ریشه های صورت و هم ریشه های مخرج را پیدا می کنیم .

مرحله ی ۲ : با تعیین مرتبه ی ریشه ها ، نوع ریشه ها (ساده یا مکرر مرتبه ی فرد یا مکرر مرتبه ی زوج) را مشخص می کنیم .

مرتبه ی ریشه: مجموع تعداد دفعات تکرار ریشه در صورت و مخرج

مرحله ی ۳ : جدول تعیین علامت را تشکیل داده و ریشه ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته و ریشه های مکرر مرتبه ی زوج را ستاره دار می کنیم .

مرحله ی ۴ : به ازای ریشه های مخرج عبارت تعریف نشده و به ازای ریشه های صورت عبارت صفر است .

توجه : به ازای ریشه های مشترک بین مخرج و صورت نیز عبارت تعریف نشده است .

مرحله ی ۵ : به این موضوع توجه می کنیم که علامت راست ترین خانه با علامت ضریب قلدر عبارت یکسان می باشد .

مرحله ی ۶ : از راست به چپ شروع به حرکت می کنیم و باید بدانیم که در ریشه های ساده و مکرر مرتبه ی فرد علامت عوض می شود ولی در ریشه های مکرر مرتبه ی زوج علامت عوض نمی شود .

توجه : ریشه ی ساده ی داخل قدرمطلق در کل در حکم ریشه ی مکرر مرتبه ی زوج است .

نکته :

۱) در برخورد با رادیکال ها به موارد زیر توجه کنید :

- رادیکال فرجه فرد نقش هویج را ایفا می کند پس کلا به آن توجه نمی کنیم و کنارش می گذاریم .
- رادیکال فرجه زوج را جدی می گیریم و دامنه ی عبارت دارای رادیکال فرجه زوج را به دست می آوریم .

۲) قوانین نامساوی ها :

- اگر به طرفین نامساوی عدد ثابتی اضافه شود یا از طرفین نامساوی عدد ثابتی کم شود، جهت نامساوی عوض نمی شود .
- اگر طرفین نامساوی را ضرب در یک عدد مثبت یا تقسیم بر یک عدد مثبت کنیم، جهت نامساوی عوض نمی شود .
- اگر طرفین نامساوی را ضرب در یک عدد منفی یا تقسیم بر یک عدد منفی کنیم، جهت نامساوی عوض می شود .

۳)

$$\begin{cases} u^۲ \leq a^۲ \xrightarrow{a\ >\ ۰} -a \leq u \leq a \\ u^۲ \geq a^۲ \xrightarrow{a\ >\ ۰} u \geq a \ \text{یا}\ u \leq -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} |u| \leq a \xrightarrow{a\ >\ ۰} -a \leq u \leq a \\ |u| \geq a \xrightarrow{a\ >\ ۰} u \geq a \ \text{یا}\ u \leq -a \end{cases}$$

مثال :

مجموعه جواب نامعادله ی $\dfrac{|x-7|(2x^2-7x-9)(1-3x)^4}{(x^2-1)(2x-x^2)^3} \geq 0$ به چه صورت است ؟

$x^3(2-x)^3$

$$\frac{+\times+\times+}{+\times+\times-} = -$$

قلق تستی :

لبه‌ی باز: ریشه‌ی غیرمکرر و زوج مخرج

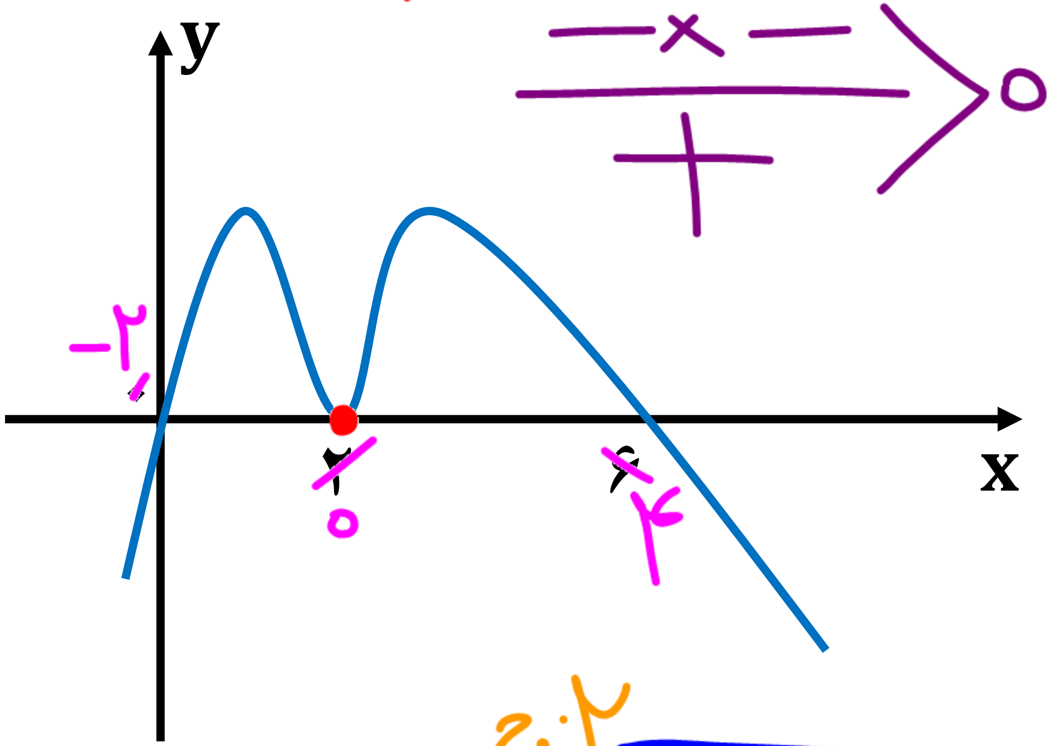
لبه‌ی بسته: « « « « صورت

داخل آکولاد: ریشه‌ی مکرر و زوج صورت یا مخرج

x	-1*		0		$\frac{1}{3}$*		1		2		$\frac{9}{2}$		7*	
عبارت	−	∞	−	∞	+	○	+	∞	−	∞	+	○	−	○	−

مجموعه جواب نامعادله : $x \in (0,1) \cup (2,\frac{9}{2}] \cup \{7\}$

اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد ، آن گاه جواب نامعادله ی $\frac{(-x^2+5x-4)f(x+2)}{|x-3|} \ge 0$ شامل چند عدد صحیح مثبت یک رقمی است ؟



$\frac{- \times -}{+} \ge 0$

x		-2		0^*		1		3^*		4^*	
عبارت	+	۰	−	۰	−	۰	+	∞	+	۰	+

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

$1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

(۸ تا)

معادل همین تست در تابع

$y = \sqrt[\text{زوج}]{\frac{(-x^2+5x-4)f(x+2)}{|x-3|}} \ge 0$

دامنه ی تابع شامل چند عدد صحیح مثبت یک رقمی (۸)

اگر جدول تعیین علامت تابع $y = (2x - 5a)^2((1 - \frac{b}{2})x + c + 3)$ به صورت زیر باشد ،

حاصل $\frac{a^2 - b}{c}$ کدام است ؟ $(b \in N)$

x		-۲		۳	
y	−	⫶	+	⫶	+

۱) ۰/۱۱−

۲) ۰/۳۳−

۳) ۰/۲۲−

۴) ۰/۴۴−

علامت قدر

$1-\frac{b}{2}>0 \rightarrow \frac{b}{2}<1 \rightarrow b<2$

$b=1$

$6-5a=0 \rightarrow 5a=6 \rightarrow a=\frac{6}{5}=1/2$

$c+2=0 \rightarrow c=-2$

$\frac{a^2-b}{c} = \frac{\frac{36}{25}-\frac{25}{25}}{-2} = -0/22$

$\frac{11}{25}$

در بازه ی (a , b) عبارت $2x^2 - x - 10$ منفی و عبارت $\left|\frac{x+3}{2} - 2\right|$ کوچک تر از یک است . بیش ترین مقدار $a - b$ کدام است ؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۴/۵

۴) ۳/۵

$a = -1 ,\ b = 2/5$

$* \quad 2x^2 - x - 10 < 0 \rightarrow -2 < x < \frac{5}{2}$

$* \quad \left|\frac{x-1}{2}\right| < 1 \xrightarrow{\times 2} |x-1| < 2 \rightarrow -2 < x-1 < 2 \xrightarrow{+1} -1 < x < 3$

اشتراک :

$x \in (-1 , 2/5)$

۳/۵

$x^2 - x - 20 = 0$

$S = 1$

$P = -20$

$-4 ,\ 5$

اگر جواب نامعادله ی $x(x^2 - x - 8) + 12 > 0$ به صورت $(a , +\infty) - \{b\}$ باشد ، حاصل $b - a$ کدام است ؟

۱) ۱

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۳

$$\overset{-3}{x^3} - x^2 - 8\overset{2}{x} + 12 > 0$$

$$(x-2)(\underbrace{x^2+x-6}_{(x+3)(x-2)}) > 0$$

$$\underbrace{(x-2)^2(x+3)}_{} \qquad 2 \quad -3$$

$$b - a = 2 - (-3) = 5$$

با توجه به تکنیک ریشه‌ها جدول تعیین علامت تشکیل نمی‌دهم.

نکته ی طلایی :

عبارت های همواره مثبت را در حل نامعادله و تعیین علامت کنار می گذاریم .

توجه : به دامنه ی بخش حذف شده دقت کنید.

$\cdot <$ عدد مثبت $+$ عبارت های همواره نامنفی

$|u|$ و $u^{\text{زوج}}$ و $\sqrt[\text{زوج}]{u}$

یادآوری : $ax^{2}+bx+c \xrightarrow{\Delta<0} \begin{cases} a>0 \rightarrow ax^{2}+bx+c>0 \\ a<0 \rightarrow ax^{2}+bx+c<0 \end{cases}$

مثال : جزوات

مجموع مربعات اعداد صحیح حاضر در مجموعه جواب نامعادله ی

$$\frac{(-x^2+x-1)(\sqrt{x+4}+2)(x^2+x-2)}{(x-3)(|x-1|+2)} \ge 0$$

برابر چند است ؟

۱) ۱۳

۲) ۲۰

۳) ۲۵

۴) ۲۹

$\sqrt{x+4} \ge 0 \quad (x \ge -4)$

$\frac{x^2+x-2}{x-3} < 0$

منفی

-4

$-2 \quad 1 \quad 3$

$-4, -3, 2 \longrightarrow 16+9+4 = 29$

دست

دست

دست

فرم استاندارد
نامعادله

$f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$

نکته :

۱) نامعادله باید به فرم استاندارد باشد تا قابل حل شود .

توجه : در فرم استاندارد نامعادله یک طرف عبارت و طرف دیگر صفر می باشد .

۲) در صورت دیدن عامل تکراری $f(x)$ در چند جای نامعادله ، از تغییر متغیر $t = f(x)$ برای حل نامعادله استفاده می کنیم .

۳) اگر در یک محدوده :

نمودار تابع $f(x)$ بالاتر از نمودار تابع $g(x)$ باشد

یا به عبارتی دیگر

نمودار تابع $g(x)$ پایین تر از نمودار تابع $f(x)$ باشد ،

برای پیدا کردن آن محدوده داریم :

$$f(x) > g(x)$$

مجموعه جواب نامعادله ی $\frac{x}{x-۲} > \frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$ ، شامل چند عدد صحیح مثبت است ؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲ ✓

۴) ۱

$$\frac{7x-8}{\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)}} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0$$

x^2-6x+8: ۲ ، ۴

$(x-2)(x+1)$: ۲ ، -1

	-1		2^*		4	
$+$		$-$		$-$		$+$

$x \in (-1,2) \cup (2,4)$ یا $(-1,4)-\{2\}$

۱ ✓ ۳ ✓

اگر مجموعه جواب نامعادله ی $x^۶ - ۳x^۴ + ۵x^۲ - ۶ \leq ۰$ ، به صورت [a و b] باشد ،
بیش ترین مقدار a - b کدام است ؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۱ + \sqrt{۲}$
۳) $-۲ + ۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$ ✓

$-\sqrt{۲}$ $\sqrt{۲}$

$x^۲ = t$

$\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}$

$t^۳ - ۳t^۲ + ۵t - ۶ \leq ۰$

$(t-۲)\cancel{(t^۲ - t + ۳)} \leq ۰ \rightsquigarrow t - ۲ \leq ۰$

$\Delta < ۰$

$t \leq ۲$

$x \in [-\sqrt{۲} , \sqrt{۲}] \longleftarrow -\sqrt{۲} \leq x \leq \sqrt{۲} \longleftarrow x^۲ \leq ۲$

نمودار تابع $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x^2+x+1}$ به ازای چند مقدار صحیح ، پایین تر از خط $y = 3$ قرار دارد ؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) هیچ ✓

$\underbrace{x^2+x}_{t-1} + \frac{3}{\underbrace{x^2+x+1}_{t}} < 3$

$\times t > 0$

$t = x^2+x+1 > 0 \quad \Delta < 0$

توجه:
$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
$\cap$

$t^2 - 4t + 3 < 0 \Rightarrow 1 < t < 3 \Rightarrow 1 < x^2+x+1 < 3$

۱ و ۳

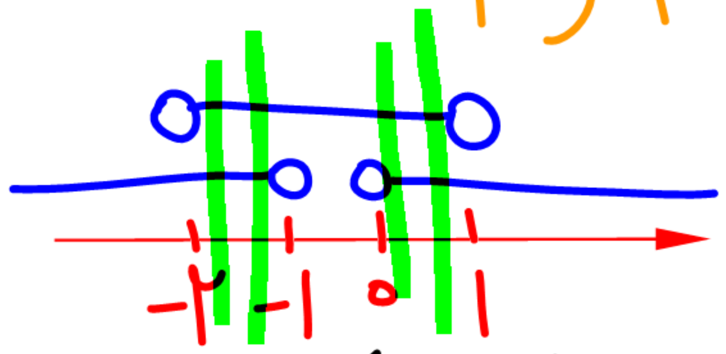
-۱ و ۰

اشتراک

$x^2 + x > 0 \rightarrow x < -1 , x > 0$

$x^2 + x - 2 < 0 \rightarrow -2 < x < 1$

-۲ و ۱



$x \in (-2,-1) \cup (0,1)$

بررسی یک قلق تستی سوپر قدرتمند :

$f(x) \leq, \geq, <, > 0 \xrightarrow{\text{مجموعه جواب}}$

- لبه باز ← مخرج ، ریشه‌ی غیرمکرر و مرتبه زوج
  - اگه ما صفر نداشتیم صورت هم میشه
- لبه بسته ← صورت ، ریشه‌ی غیرمکرر و مرتبه فرد
  - وقتی ما صفر داریم
- آکولاد ← (محتوا) ریشه‌ی مکرر مرتبه زوج صورت یا مخرج

اگر مجموعه جواب نامعادله ی $\dfrac{(2x-8)(4x(x-9)+81)}{(2x^2+5x-3)(\cancel{x^4+3})} \le 0$ به صورت $(-\infty , a) \cup (b , c] \cup \{d\}$ باشد ، حاصل $ac - 4bd$ کدام است ؟

زوج صورت یا مخرج

۱) ۴۲

۲) ۲۱

۳) −۲۱

۴) −۴۲

$-12-9=-21$

$4x^2-36x+81 = (2x-9)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2}$

$12x^2+5x-6=0$

اگر مجموعه جواب نامعادله ی $\frac{x^2-5x+a}{bx^2+4x+c} > 0$ ، به صورت $(1\,,4)-\{2\}$ باشد ، مقدار $a+b+c$ کدام است ؟

۱) ۱

۲) -1 ✓

۳) ۷

۴) ۹

غیرمکرر و تعداد زوج
صورت یا مخرج

مکرر و تعداد زوج
صورت یا مخرج

-1

مخرج $= -(x-2)^2 = -(x^2-4x+4) = \underbrace{-1}_{b}x^2+4x\underbrace{-4}_{c}$

$P=4=a$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-1 \\ c=-4 \end{cases}$$

اگر مجموعه جواب نامعادله ی $\frac{(x+6)^2(x^3-4x^2+5x-2)}{x^2+3x-5} \geq 0$ به صورت $(a \text{ و } b) \cup [c \text{ و } +\infty) \cup \{d\}$ باشد ، حاصل $a+b-\frac{d}{c}$ کدام است ؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مخرج صورت

زوج صورت

ممنوع

$$\frac{(x+6)^2(x-1)^2(x-2)}{x^2+3x-5} \geq 0$$

$$\cancel{x^2+3x-5=0}$$

$$\cancel{\Delta=9-4(-5)=29}$$

$$\cancel{\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}}$$

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)^2(x-2)$$

$$(x-2)(x-1)$$

مجموعه جواب نامعادله ی $\frac{x^۳+x-۶}{x^۲+x-۶} < ۱$ به صورت $(-\infty , a) \cup (b , c)$ باشد ، مقدار $\frac{a+۲b}{۳c}$ کدام است ؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$

۲) $-\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

$\frac{A}{B} < 1 \Rightarrow \frac{A-B}{B} < 0$

$\frac{x^3 - x^2}{x^2 + x - 6} < 0$

$x^2(x-1)$

$S=-1$
$P=-6$

$-۳ \quad ۲$

غیرمکرر و تبدیل زوج صورت یا مخرج

$-\frac{1}{6}$

اجمالی

اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x^{۲}+۸x+b}{x^{۲}+cx+d}\geq ۱$ به صورت $(-۵,\frac{-۱}{۲}]\cup(۳,+\infty)$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $\sqrt{bx-d}<c$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ

۲) ۱

۳) ۲

۴) بی شمار

صورت

زوج

$$\frac{(8-c)x+(b-d)}{x^2+cx+d}\geq 0$$

$8-c=6$ ، $b-d=-12x+15$

$c=2$

$d=-15$

$b=-12$

$$\sqrt{-12x+15}<2$$

توان ۲

$$-12x+15<4$$

$$-12x<-11 \longrightarrow x>\frac{11}{12}$$

$$-12x+15\geq 0$$

$$-12x\geq -15 \longrightarrow x\leq\frac{15}{12}$$

$$\frac{11}{12}<x\leq\frac{15}{12}$$

۱

تمثیل

$$\frac{c+2b}{-3d}=\frac{-22}{45}$$

بررسی یک قلق تستی قدرتمند :

تابع هموگرافیک

$$A < \text{ or } \le \boxed{\frac{ax+b}{cx+d}} < \text{ or } \le B$$

اعداد ثابت

مدل بسیار معروف از نامعادلات کنکوری

تکنیک : تبدیل نامعادله به معادله

هر دو نامساوی را به مساوی تبدیل کرده و با حل دو معادله ی حاصل ، دو لبه ی مجموعه جواب نامعادله را به دست می آوریم . سپس از $x = 0$ استفاده می کنیم تا ببینیم بین دو لبه جواب است یا بیرون دو لبه .

تذکر :

اگر نشان نامساوی علامت مساوی داشت ، لبه ی به دست آمده جواب نامعادله است

و

اگر نشان نامساوی علامت مساوی نداشت ، لبه ی به دست آمده جواب نامعادله نیست .

اگر a و b بزرگ ترین و کوچک ترین عدد صحیح صدق کننده در نامساوی $1 < \frac{x+4}{2x+3} \leq \frac{3}{4}$ باشند، حاصل $\frac{a+4}{2b+3}$ کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۲
۳) ۱/۵
۴) ۱

همگرا نیک

$x=1$

$4x+16=6x+9$

$2x=7$

$x=\frac{7}{2}$

$\frac{7}{7}=1$

$1<x<\frac{7}{2}$

۲/۵

$b=2$ و $a=3$

داخل ۱۴۰۱

اگر $0 \geq \frac{4-2x}{3x+1}$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

→ -1 و 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸ ✓

توجه: بی‌نهایت $\pm\infty$ ناشی از ریشه مخرج می‌باشد.

$x=0$ صدق کرد.

$$0 \leq \frac{-2x+4}{3x+1} < +\infty$$

هم‌گرافیک

$x=2$ ✓

$x=-\frac{1}{3}$ ✗

$-\frac{1}{3}$ — 0 ✓ ✗ — 2

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \longrightarrow 3x \longrightarrow -1 < 3x \leq 6$$

محدود